Lycée militaire de Saint-Cyr **AP maths – Raisonnement par récurrence** **TS**

Exercice 1

① En calculant les premiers termes de la suite : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{1+u_n^2} \end{array}\right.$, conjecturer une formule explicite et la démontrer par récurrence.

② Pour tout $n \geqslant 3, 3^n \geqslant (n+2)^2$.

③ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2

① Soit f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = x(2-x)$

(a) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;1]$.

(b) En déduire que si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$

② Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) A l'aide de la calculatrice, afficher les 10 premiers termes de la suite. Noter sur la copie la valeur approchée à 10^{-3} de u_{10} et faire une conjecture sur le sens de variation de la suite.

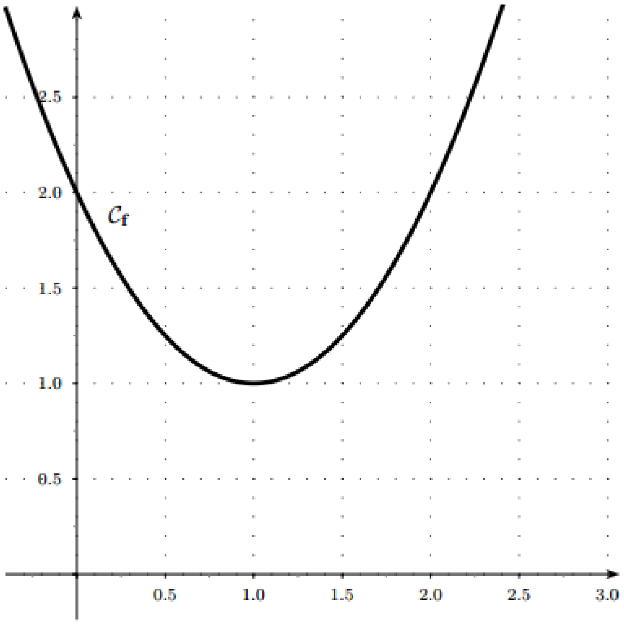
(b) A l'aide de la première partie, démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

(c) En déduire le signe de $u_{n+1} - u_n$ et prouver la conjecture du (a).

(d) **BONUS** Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$

Exercice 3

La suite (u_n) est définie par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.
La fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est représentée ci-dessous.



1. Conjectures graphiques
   (a) **Construire** les points $M_0\,(u_0;0)$, $M_1\,(u_1;0)$, $M_2\,(u_2;0)$, $M_3\,(u_3;0)$ et $M_4\,(u_4;0)$ sur le graphique ci-dessus (*sans faire de calculs et en laissant apparents les traits de construction*).
   (b) Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sur sa convergence ?
2. Démonstration des conjectures précédentes.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   (b) Donner une expression factorisée de $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite.
   (c) Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.