<u>Exercice 1</u> *d'après Amérique du Nord, 2012*

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

— F l'évènement « le membre choisi est une femme »,

— T l'évènement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1. Montrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $\frac{2}{5}$.
2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
   Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.
   a. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
   b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
   Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.
   c. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$.
2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.
   Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
   On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 2 *D'après Nouvelle Calédonie , 2012*

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Tous les résultats seront donnés sous la forme de fractions.

On dispose d'une urne U contenant trois boules blanches et deux boules rouges indiscernables au toucher.

Partie A

On considère l'expérience suivante : on tire successivement trois fois de suite une boule de l'urne U, en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.
On appelle X le nombre de fois où on a obtenu une boule rouge.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement une fois une boule rouge.
3. Déterminer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

Partie B

On procède maintenant à une nouvelle expérience :
- on tire une boule de l'urne U. Si elle est rouge on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule à nouveau ;
- si cette deuxième boule est rouge, on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule pour la troisième fois.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.
2. On appelle Y le nombre de boules rouges obtenues lors d'une expérience. La variable aléatoire Y prend donc la valeur 1 si la dernière boule est rouge et 0 sinon.

   Déterminer la loi de probabilité de Y et son espérance mathématique.
3. On appelle N le nombre de tirages effectués lors d'une expérience.

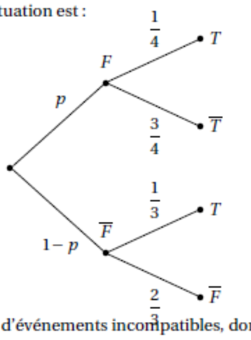
   Déterminer la loi de probabilité de N et son espérance mathématique.
4. On appelle *proportion moyenne de boules rouges* le rapport de l'espérance du nombre de boules rouges obtenues sur l'espérance du nombre de tirages.

   Montrer que la proportion moyenne de boules rouges dans l'expérience est la même que la proportion de boules rouges dans l'urne.

Corrigé exo 1

Partie A

Notons p la probabilité que le membre choisi au hasard soit une femme.
L'arbre de probabilités correspondant à la situation est :



1. $T = (T \cap F) \cup (T \cap \overline{F})$. C'est une réunion d'événements incompatibles, donc :
   $p(F) = p(T \cap F)) + p(T \cap \overline{F}) = p_F(T)p(F) + p_{\overline{F}}(T)p(T)$.
   Par conséquent : $p(T) = p \times \frac{1}{4} + (1-p) \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)p + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}p + \frac{1}{3}$
   On sait que $p(T) = 0,3 = \frac{3}{10}$.
   On en déduit : $-\frac{1}{12}p + \frac{1}{3} = \frac{3}{10} \iff \frac{p}{12} = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$ d'où $p = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.
   La probabilité de l'événement F est : $\boxed{p(F) = \frac{2}{5}}$
2. $p_T(F) = \frac{p(F \cap T)}{p(T)} = \frac{\frac{p}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{10p}{3 \times 4} = \frac{5p}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\boxed{p_T(F) = \frac{1}{3}}$

Partie B

1. (a) Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis.
   Nous avons répétition d'une expérience aléatoire à deux issues, identique et indépendante. N suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 4$ (nombre d'épreuves) et $p = \frac{3}{10}$: $\boxed{N \hookrightarrow \mathscr{B}\left(4\,;\,\frac{3}{10}\right)}$.
   On sait alors que $p(N = k) = \binom{4}{k} \times \frac{3}{10}^k \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \times \frac{3}{10}^k \times 0,7^{4-k}$.
   D'où : $p(N = 2) = \binom{4}{2} \times \frac{3}{10}^2 \times 0,7^2 = \boxed{\frac{1323}{5000} \approx 0,2646}$.

   (b) Cette fois, N suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n\,;\,\frac{3}{10}\right)$.
   $p_n = p(N \geqslant 1) = 1 - p(N = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{3}{10}\right)^0 \times \left(\frac{7}{10}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$: $\boxed{p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n}$.

   (c) $p_n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geqslant 0,7^n \Leftrightarrow \ln(0,01) \geqslant n\ln(0,7)$ (en appliquant la fonction ln qui est croissante)
   d'où $n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,07)} \approx 12.9$.
   Il faut que n soit supérieur ou égal à 13 pour que p_n soit supérieur à 0,99.

2. (a) Le nombre de tirages possibles de deux jetons est $\binom{100}{2} = 4950$.
   X peut prendre les valeurs 35 (deux jetons gagnants), 15 (un seul jeton gagnant) et -5 (deux jetons perdants).
   $p(X = 2) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{45}{4950} = \frac{1}{110}$.
   $p(X = 0) = \frac{\binom{90}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{4005}{4950} = \frac{89}{110}$
   $p(X = 1) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 2)] = 1 - \left(\frac{1}{110} + \frac{89}{110}\right) = 1 - \frac{90}{110} = \frac{20}{110} = \frac{2}{11}$.
   La loi de probabilité de X est donc :

x_i	-5	15	35
$p(X = x_i)$	$\frac{89}{110}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{110}$

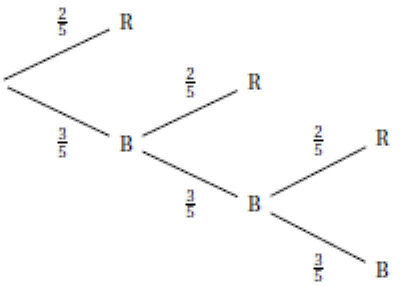
   (b) L'espérance est $E(X) = \sum_i x_i p(X = x_i) = -5 \times \frac{89}{110} + 15 \times \frac{2}{11} + 35\frac{1}{110} = -\frac{110}{110} = -1$. $\boxed{E(X) = -1}$.
   Cela signifie qu'en moyenne, sur un grand nombre de partie, le joueur perd 1 euro par partie.

<u>**Corrigé exo 2**</u>

1. Les trois tirages sont indépendants, et à chaque tirage la probabilité de tirer une boule rouge est égale à $\dfrac{2}{3+2}=\dfrac{2}{5}$: on a donc une épreuve de Bernoulli et la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\dfrac{2}{5}$.
2. La probabilité de tirer k $(0 \leqslant k \leqslant 3)$ boule(s) rouge(s) est égale à
$p(X=k)=\binom{3}{k}\left(\dfrac{2}{5}\right)^k\left(1-\dfrac{2}{5}\right)^{3-k} \quad (\star)$.
En particulier : $p(X=1)=\binom{3}{1}\left(\dfrac{2}{5}\right)^1\left(1-\dfrac{2}{5}\right)^{3-1}=3\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3^2}{5^2}=\dfrac{54}{125}$.
3. On sait que $\mathrm{E}(X)=n\times p=3\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{5}=1,2$.
Vérification : on calcule avec la formule $(\star)$:
$p(X=0)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{27}{125}$;
$p(X=2)=\dfrac{3!}{2!}\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{36}{125}$;
$p(X=3)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{8}{125}$.
On a donc $\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{27}{125}+1\times\dfrac{54}{125}+2\times\dfrac{36}{125}+3\times\dfrac{8}{125}=\dfrac{54+72+24}{125}=\dfrac{150}{125}=\dfrac{6}{5}$.
Sur un grand nombre de tirages on tirera un peu plus d'une boule rouge en moyenne par tirage (en moyenne 150 boules rouges sur 125 tirages).

Partie B

1.



2. On a $p(Y=1)=\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{6}{25}+\dfrac{18}{125}=\dfrac{50+30+18}{125}=\dfrac{98}{125}$.
$p(Y=0)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{125}$.
Donc $\mathrm{E}(Y)=1\times\dfrac{98}{125}+0\times\dfrac{27}{125}=\dfrac{98}{125}$.
3. Toujours d'après l'arbre : $p(N=1)=\dfrac{2}{5}$; $p(N=2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25}$ et $p(N=3)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{25}$.
On a donc $\mathrm{E}(N)=1\times\dfrac{2}{5}+2\times\dfrac{6}{25}+3\times\dfrac{9}{25}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{12}{25}+\dfrac{27}{25}=\dfrac{10+12+27}{125}=\dfrac{49}{25}$.
4. On a $\dfrac{\mathrm{E}(Y)}{\mathrm{E}(N)}=\dfrac{\frac{98}{125}}{\frac{49}{25}}=\frac{98}{125}\times\frac{25}{49}=\frac{2}{5}$, soit la proportion de boules rouges dans l'urne.